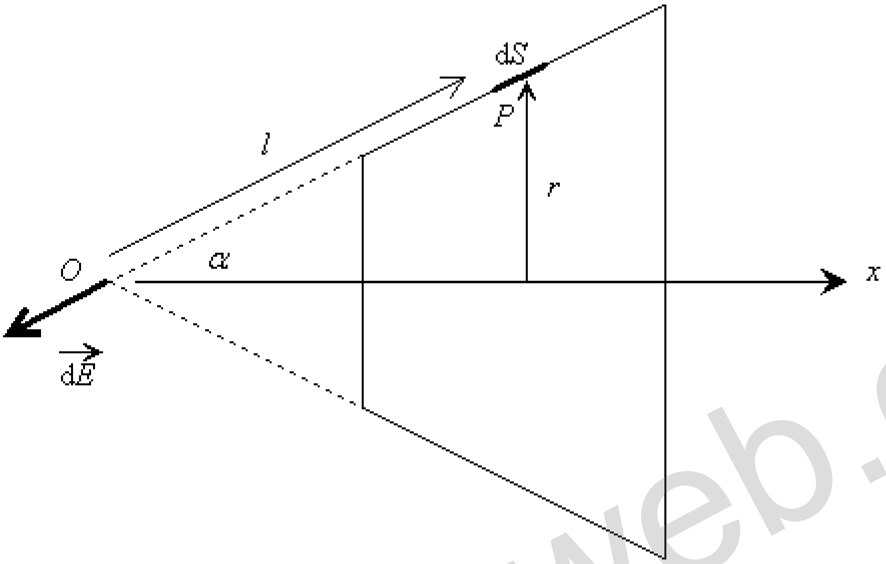
EM1.3. Champ créé par une portion de cône.

Les plans passant par l'axe *Ox* sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrostatique doit donc appartenir simultanément à l'ensemble de ces plans donc à leur intersection : le champ $\vec{E}(O)$ a sa direction portée par cet axe *Ox*
On considère un élément de surface d*S* situé sur le tronc de cône et centré autour du point *P*.
La figure dans le plan de la feuille est la suivante :



Cet élément de surface crée en *O* un champ élémentaire :

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma \mathrm{d}S}{PO^2}\vec{u}_{PO} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}l}{l^2}\vec{u}_{PO}$$

Seule la projection de ce vecteur sur l'axe *Ox* contribue au champ au point *O* :

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}\vec{E}.\vec{u}_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}l}{l^2}\vec{u}_{PO}.\vec{u}_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}l}{l^2}\cos\alpha$$

On exprime *l* en fonction de *r* :

$$\sin\alpha = \frac{r}{l} \quad \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{l^2} = \dfrac{\sin^2\alpha}{r^2} \\ \mathrm{d}l = \dfrac{1}{\sin\alpha}\mathrm{d}r \end{cases}$$

On obtient :

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}\vec{E}.\vec{u}_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sigma r \mathrm{d}\theta \frac{1}{\sin\alpha}\mathrm{d}r\frac{\sin^2\alpha}{r^2}\cos\alpha$$

$$\mathrm{d}E_x = -\frac{\sigma_o a}{4\pi\varepsilon_o}\cos\alpha\sin\alpha\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\mathrm{d}\theta$$

www.kholaweb.com

Le champ en O s'écrit :

$$E_x = -\frac{\sigma_o a}{4\pi\varepsilon_o}\cos\alpha\,\sin\alpha\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= \frac{\sigma_o a}{2\varepsilon_o}\cos\alpha\,\sin\alpha\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right) \\ E_x &= \frac{\sigma_o a}{4\varepsilon_o}\sin 2\alpha\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right) \end{aligned}}$$

www.kholaweb.com